

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 15 FEBRUARIE 2015

CLASA A XII-A

Profil tehnic, profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului,
profil real-specializarea științele naturii

1. a) (3p) Arătați că există numerele reale a și b astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$, să satisfacă relația $f(x) + f'(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
b) (4p) Calculați $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$, unde $x \in (-2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6\{x\}(\{x\} - 1)$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x . Arătați că funcția f admite primitive pe $[0, 2]$ și determinați primitiva F pentru care $F(1,5) = 0,5$.
3. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$
a) (2p) Arătați că $0 \notin \mathbb{Z}(\sqrt{2})$, dar $3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}(\sqrt{2})$.
b) (5p) Arătați că $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ este stabilă față de înmulțirea numerelor reale și $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), \cdot)$ este grup comutativ.
4. Considerăm (G, \cdot) un grup și e elementul său neutru. Dacă elementele $a, b \in G$ satisfac condițiile $b^6 = e$ și $ab = b^4a$, atunci $b^3 = e$ și $ab = ba$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect primește un punctaj de la 0 la 7.

Timp de lucru efectiv 3 ore.